Mathematisches Institut der Universität München, WISE 2019/20

Übungen zur Mathe III für Physiker

Prof.Dr.P.Pickl

Blatt 12

Aufgabe 1:

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die im Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ nur einfache Pole $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b$ hat. Dann nennt man

$$P \int_a^b f(x)dx := \lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_a^{x_1-\epsilon} f(y)dy + \int_{x_1+\epsilon}^{x_2-\epsilon} f(y)dy + \ldots + \int_{x_n+\epsilon}^{b} f(y)dy \right)$$

den *Hauptwert* des Integrals der Funktion f über dem Intervall $[a, b]$.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ habe endlich viele Pole (erster Ordnung) $(x_l)_{l \in I}$ auf der reellen Achse. Betrachten Sie einen Weg von $-R$ bis R entlang der reellen Achse, wobei jeder Pol x_l mit einem Halbkreis $\overset{\curvearrowright}{x_l}$ in der oberen komplexen Halbebene umgangen wird. Schließen Sie den Weg durch einen Halbkreis vom Radius R in der oberen Halbebene. Die (endlich vielen) Pole von f in der oberen Halbebene seien $(z_j)_{j \in J}$ Zeigen Sie: Wenn das Integral über f über den Halbkreis im Limes $R \to \infty$ veschwindet, dann gilt

$$P \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{l \in J} \operatorname{res}(f, z_l) + i\pi \sum_{n \in I} \operatorname{res}(f, x_n) \,.$$

Aufgabe 2:

Betrachten Sie die Potenzreihe $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $|a|, |b| \leq r < R$. Es bezeichne $f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$. Zeigen Sie:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{N \to \infty} \int_a^b f_N(x)dx,$$

also, dass Sie in diesem Fall Integration und Limesbildung vertauschen können.

Aufgabe 3:

1. Sei $r \in \mathbb{R}^+$. Es bezeichne $\partial K_r(0) \subset \mathbb{C}$ den Kreis in der komplexen Ebene mit Radius r um den Punkt 0. Berechnen Sie das Integral

   $$\oint_{\partial K_r(0)} \frac{1}{z} dz \,.$$

   Geben Sie alle Rechenschritte explizit an.

2. Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes das Integral

   $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+9)^2} dx \,.$$

   Begründen Sie jeden Ihrer Rechenschritte sauber.